Matematica

Equazioni di grado superiore al 2°

Autore: ***Prof. Pappalardo Vincenzo***
docente di **Matematica e Fisica**

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$\boxed{x^3-4x=0}$$

$$x\left(x^2-4\right)=0$$

$$x(x+2)(x-2)=0$$

$$x=0 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=2$$

$$\textit{equazione di } 3° \textit{ grado} \ \rightarrow \ 3 \textit{ soluzioni}: \ x_1=0, \ x_2=-2, \ x_3=2$$

$$\boxed{x^4+x^2-12=0}$$

$$\left(x^2-3\right)\left(x^2+4\right)=0$$

$$x^2-3=0 \quad x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$$

$$x^2+4=0 \quad x^2=-4 \quad \textit{impossibile in } \mathbb{R}; \ \textit{in } \mathbb{C}, \ x=\pm 2i$$

$$\textit{equazione di } 4° \textit{ grado} \ \rightarrow \ \textit{in } \mathbb{C}, \ 4 \textit{ soluzioni}: \ x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\sqrt{3}, \quad x_3=-2i, \quad x_4=2i$$

$$\boxed{4x^3-8x^2-11x-3=0}$$

Scomponendo con Ruffini si ottiene :

$$(x-3)(2x+1)^2=0$$

$$x=3 \vee x=-\frac{1}{2} \ (soluz.\ di\ molteplicità\ 2)$$

equazione di 3° *grado* $\rightarrow$ *tenendo conto della molteplicità,* 3 *soluzioni :* $x_1=3,\ x_2=x_3=-\frac{1}{2}$

$$\boxed{6x^5-3x^4-2x^3+x^2=0}$$

$$x^2\left(6x^3-3x^2-2x+1\right)=0$$

$$x^2\left[3x^2(2x-1)-(2x-1)\right]=0$$

$$x^2(2x-1)\left(3x^2-1\right)=0$$

$$x^2=0 \rightarrow x=0\ (molt.\ 2)$$

$$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$3x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{x^2\left(x^2-1\right)=1-2x}$$

$$x^4-x^2=1-2x$$

$$x^4-x^2+2x-1=0$$

$$x^4-(x-1)^2=0$$

$$\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$$

$$x^2+x-1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2-x+1=0 \;\; \mathit{imposs.\ in}\ \mathbb{R}\ \left(\Delta<0\right);\ \mathit{in}\ \mathbb{C},\ \ x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Equazioni BINOMIE $\boxed{ax^n + b = 0}$

$$\boxed{8x^3 - 125 = 0}$$

$$8x^3 = 125$$

$$x^3 = \frac{125}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

Risolvendo per scomposizione in fattori, si troverebbero anche le soluzioni complesse:

$$8x^3 - 125 = 0$$

$$(2x-5)(4x^2 + 10x + 25) = 0$$

$$x = \frac{5}{2}; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-100}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-75}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm i\sqrt{75}}{4} = \frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{128x^3 + 6 = 0}$$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$$64x^3 + 3 = 0$$

$$64x^3 = -3$$

$$x^3 = -\frac{3}{64}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{64}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{64}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

$$\boxed{81x^4 - 16 = 0}$$

$$81x^4 = 16$$

$$x^4 = \frac{16}{81}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$$

Scomponendo in fattori :

$$81x^4 - 16 = 0$$

$$\left(9x^2 + 4\right)\left(9x^2 - 4\right) = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0; \quad x^2 = -\frac{4}{9} \quad \textit{imposs. in } \mathbb{R}; \ \textit{in } \mathbb{C},\ x = \pm\frac{2}{3}i$$

$$9x^2 - 4 = 0; \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad x = \pm\frac{2}{3}$$

$$\boxed{81x^4 + 16 = 0} \quad \textit{impossibile in } \mathbb{R}$$

$$\boxed{x^5 - 32 = 0}$$

$$x^5 = 32$$

$$x = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\boxed{x^5 + 32 = 0}$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\boxed{x^6-1=0}$$

$$x^6=1$$

$$x=\pm\sqrt[6]{1}=\pm 1$$

$$\boxed{x^6+1=0}$$

$$x^6=-1$$

impossibile in $\mathbb{R}$

$$\boxed{x^7+5x^4=0}$$

$$x^4\left(x^3+5\right)=0$$

$$x^4=0\rightarrow x=0$$

$$x^3+5=0\rightarrow x^3=-5\rightarrow x=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$$

$$\boxed{8\underbrace{x^6}_{\left(x^3\right)^2}-7x^3-1=0}$$

$$x^3=t$$

$$8t^2-7t-1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm9}{16}=\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{1}{8}\\ 1\end{matrix}\right.$$

$$t=-\frac{1}{8}\quad\vee\quad t=1,\ \ da\ cui:$$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

$$x^3=1\rightarrow\boxed{x=1}$$

$$\boxed{4\underbrace{x^4}_{(x^2)^2}-11x^2-3=0}$$ EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con n = 2)

$$(x^2)_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm13}{8}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\\ 3\end{array}\right.$$

$$x^2=-\frac{1}{4}\ \textit{impossibile in}\ \mathbb{R}$$

$$x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$\boxed{x^4-11x^2+18=0}$$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$$(x^2-9)(x^2-2)=0$$

$$x^2-9=0\ \rightarrow\ x^2=9;\ x=\pm3$$

$$x^2-2=0\ \rightarrow\ x^2=2;\ x=\pm\sqrt{2}$$

Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

$$\boxed{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=2}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{x-2}=t}$$

$$t^4+t^2=2;\quad t^4+t^2-2=0;\quad \left(t^2\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$$

$$t^2=-2\ \textit{imposs. in }\mathbb{R};\quad t^2=1\to\boxed{t=\pm 1}$$

$$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{-1}\ \to\ x-1=-x+2\ (x\neq 2);\ 2x=3;\ \boxed{x=3/2}$$

$$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{1}\ \to\ \cancel{x}-1=\cancel{x}-2\ (x\neq 2)\ \ \textit{impossibile}$$

$$\boxed{\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x}$$

Converrà addizionare 1 *ad ambo i membri, per ottenere*:

$$\left(x^2+3x+1\right)^3+1=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1$$

dopodiché:

$$x^2+3x+1=z$$

$$z^3+1=z^2+z;\quad z^3-z^2-z+1=0;\quad z^2(z-1)-(z-1)=0;$$

$$(z-1)\left(z^2-1\right)=0;\qquad (z-1)(z+1)(z-1)=0;\qquad (z-1)^2(z+1)=0;\qquad z=1\ \vee\ z=-1$$

$$x^2+3x\cancel{+1}=\cancel{1}\ ;\quad x(x+3)=0;\quad x=0\vee x=-3$$

$$x^2+3x+1=-1\ ;\quad x^2+3x+2=0;\ \ldots\ x=-1\vee x=-2$$

Le soluzioni sono, in definitiva:

$$\boxed{x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0}$$

In alternativa:

$$\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1-1$$

$x^2+3x+1=z$, ecc.

$$\boxed{x^6 - 5x^2 + 2 = 0}$$

Lasciando così, non si riesce a scomporre; ponendo invece $x^2 = t$ *si ha* $t^3 - 5t + 2 = 0$ *ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che* $P(2) = 0$. *Si ottiene*:

$$(t-2)\left(t^2 + 2t - 1\right) = 0$$

$$t = 2 \rightarrow x^2 = 2; \; \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

$$t = -1 - \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 - \sqrt{2} < 0 \; \textit{impossibile in } \mathbb{R}$$

$$t = -1 + \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 + \sqrt{2}; \; \boxed{x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$$

Casi particolari

Esempio:

$$(3x-6)\left(x^2-x+1\right)=x^2-4$$

$$3\cancel{(x-2)}\left(x^2-x+1\right)=(x+2)\cancel{(x-2)}$$

$$3x^2-3x+3=x+2$$

$$3x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\left\langle\begin{array}{l}\boxed{1/3}\\ \boxed{1}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Riepilogo soluzioni : } x=2,\ x=1/3,\ x=1}$$

Quando, in un’equazione,
càpita di poter semplificare per un’espressione contenente l’incognita,
la semplificazione si può effettuare, ma a patto di tener conto che
i valori dell’incognita, i quali annullano l’espressione per cui si semplifica,
sono soluzioni dell’equazione!
(infatti, se sostituiti in essa, la trasformerebbero nell’uguaglianza vera $0 = 0$)